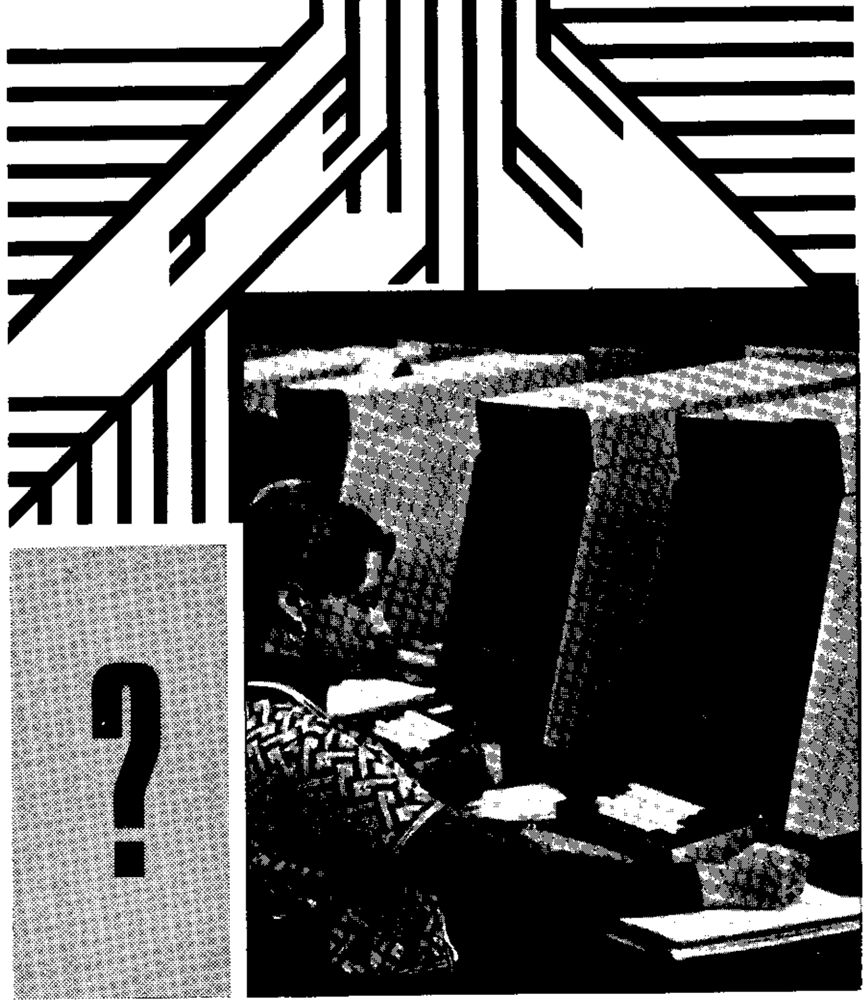
ANALISIS MULTICRITERIO EN UN CONTEXTO IMPRECISO



G. LASSIBILLE y C. PARRON

INSTITUTO DE MATEMATICAS ECONOMICAS
FACULTAD DE CIENCIA ECONOMICA Y DE GESTION
UNIVERSIDAD DE DIJON
4, BOULEVARD GABRIEL
21000 DIJON (FRANCIA)

Primera de Dos Partes.

INTRODUCCION

Los problemas multidimensionales han sido siempre tratados en un contexto preciso a falta de un instrumento matemático apropiado. Esto ha conducido a ignorar la impresión y a considerar los datos tratados como solamente manchados de incertidumbre. Por otra parte, tal vez concedemos poca importancia a la distinción entre estas dos nociones,, de-

Traducido por: Dr. (C) Fernando Ibarra Aispuro, del Centro de Investigación de la Sección de Graduados de E.S.C.A. I.P.N.

bido a que el instrumento de imprecisión estaba aún en la infancia cuando se desarrollaban los análisis multicriterios del tipo ELECTRA. . . Hoy en día este instrumento existe; es pues necesario reformular el análisis multicriterio (sin poner en duda su principio). En efecto, la matemática de lo borroso deberá permitirnos representar mejor la realidad y por lo mismo guiar mejor la selección que hace el tomador de decisiones.

El estudio presentado más adelante es un primer enfoque modesto, ya que abordamos el problema de la introducción de la imprecisión en el análisis multicriterio bajo un aspecto no general; no es más que una actualización del análisis "clásico".

El plan que seguiremos en esta presentación es el siguiente:

I. Formulación de un problema multicriterio en un contexto impreciso.
II. Definición y construcción de una relación de dominancia.
III. La relación de dominancia imprecisa y la ayuda a la decisión.

Notación: representamos un elemento o una relación precisa escribiendo el símbolo de este elemento. Una relación imprecisa se representa escribiendo el símbolo y luego subrayándolo. Ejemplo:

a es un elemento preciso
S es una relación precisa
$\underset{\sim}{S}$ es una relación imprecisa o borrosa

I. *Formulación de un problema multicriterio en un contexto impreciso.*

¿Cómo, a partir de un conjunto A de acciones posibles, ayudar a un tomador de decisiones (éste puede ser un individuo, una colectividad) a hacer una selección entre las acciones del conjunto A? El análisis multicriterio, mejor que el análisis unicriterio, permite aportar una respuesta a este problema (sección I-1). Sin embargo, este análisis, tal como ha sido formulado, no toma en cuenta la imprecisión, característica de todo comportamiento humano. ¿Por cuáles medios podemos introducir lo borroso en el análisis? Son posibles varias vías de investigación, nosotros consideraremos una posibilidad sugerida por un método multicriterio existente (sección I-2).

I-1. *Análisis multicriterio en un ambiente preciso.*

Todo análisis que tenga por objeto la ayuda a la decisión debe comenzar por la enumeración de las diferentes acciones posibles que se ofrecen al tomador de decisiones. Realizado este primer trabajo, es necesario describir en seguida las consecuencias de las diferentes acciones, y no es sino a través de sus evaluaciones que se podrá pretender formarse una opinión y guiar la selección.

I-1-1. *Presentación general. Definición.*

Sea $A=\{a_1, a_2, \ldots, a_i, a_j, \ldots a_n,\}$ un conjunto no borroso de acciones posibles. Este puede ser localizaciones eventualmente consideradas por una empresa o bien diferentes programas de inversión. En el primer caso, las diferentes acciones pueden tener consecuencias, por ejemplo, sobre

—el plan financiero
—el aprovisionamiento de materias primas
—la calidad del producto terminado

Una vez descritas las consecuencias de las acciones de la manera más completa posible, es importante poner de manifiesto los criterios (o puntos de vista) que nos permitirán juzgar las acciones. Así, para un problema de localización podemos seleccionar los criterios siguientes:

—proximidad de ejes carreteros
—calificación de la mano de obra

Sea $M_j = \{ j : j \in [1, 2, \ldots, M] \}$

este conjunto de criterios manifestados por el tomador de decisiones. Designemos por K_j al conjunto de resultados a los que el criterio j puede conducir y por estado, a uno de los elementos de K_j.

Por ejemplo, para el criterio calificado de la mano de obra podemos seleccionar como conjunto de estados posibles

$\{$mala, pasable, media, buena, muy buena$\}$

Suponemos que cada K_j está dotado de una estructura de escala. Bajo el término de escala designamos a un conjunto finito de estados y de apreciaciones cuyos elementos están todos arreglados en un orden al que se le da cierto significado (escala de preferencia, escala jerárquica, escala de valor). Una escala que corresponda al conjunto de estados anterior podría ser

$$\{0, 10, 20, 30, 40\}$$

Es posible definir una aplicación γ_j que a cada acción $a_j \in A$ hace corresponder un estado determinado y único $\gamma_j(a_j) \in K_j$.

$\gamma_j(a_j)$ es la evaluación de la acción a_j según el j-avo criterio. En esta forma, cualquiera que sea el par de acciones (a_j, a_j) no diferirán que por sus evaluaciones en el criterio j, la preferencia del tomador de decisiones va a la que tiene la evaluación más alta en la escala K_j.

La definición de las evaluaciones de las diferentes acciones mediante cada uno de los criterios nos conduce a la tabla de datos siguiente:

A \ M	1, . . . , j, . . . , M
a_1	
⋮	
a_i	$\gamma_j(a_i)$
⋮	
a_j	
⋮	
a_n	

Es posible atribuir a cada criterio j una ponderación p_j, que indica la importancia relativa que el tomador de decisiones concede al criterio j. ¿Cómo seleccionar, a partir de esta tabla, la mejor acción u obtener una clasificación de las acciones? Dos enfoques son posibles: hacer un análisis multicriterio o bien un análisis unicriterio.

I-1-2. *Crítica del análisis unicriterio.*

Como su nombre lo indica, este método reduce el problema a una sola dimensión fundiendo los diferentes criterios en uno solo. La contracción de un espacio multidimensional en un espacio unidimensional necesita que definamos una unidad de medida común que permita volver compatibles a los criterios. Sólo las observaciones que puedan ser medidas por una unidad común (los precios en economía) son conservadas. Las observaciones cualitativas así como aquellas no reductibles a términos monetarios son excluidas. Otra manera de volver compatibles los criterios consiste en definir una función de utilidad que reduce las preferencías múltiples no agregables. El problema se convierte entonces en la búsqueda de un subconjunto que maximice esta función de utilidad. El análisis unicriterio no conserva pues la integridad de cada punto de vista, y dado que la realidad económica es compleja, la reducción de la información a un sólo número implica que la acción económica es deformada

I-1-3. *Aporte y principio del análisis multicriterio.*

El análisis multicriterio se preocupa por comparar las acciones dos a dos, sea con el fin de arreglarlas en un preorden completo, es decir, en una secuencia que dé lugar a los ex-aequo y gracias a la cual no importa cuál acción pueda ser comparada con cualquier otra acción, o bien con el fin de eliminar la mayor parte de ellas con objeto de seleccionar una o algunas.

A cada punto de vista j podemos asociar un grafo G_j cuyos vértices represen-

tan las acciones de A. Los arcos de este grafo están definidos por la condición.

$$(a_j, a_j) \in G_j \text{ si solamente si } \gamma_j(a_i) \geq \gamma_j(a_j)$$

donde $\gamma_j(a_j) \geq \gamma_i(a_j)$ indica que la acción a_i es al menos tan buena como a_j.

Cada grafo G_j es transitivo y completo. Es transitivo porque cada criterio está dotado de una escala ordenada y la preferencia del tomador de decisiones va siempre a la acción que tiene la más alta evaluación en la escala. Esta propiedad se sintetiza así:

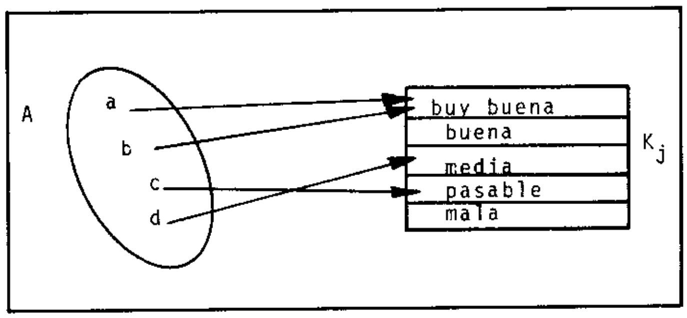
$$(a_i, a_j) \in G_j \text{ y } (a_j, a_k) \in G_j \longrightarrow (a_j, a_k) \in G_j$$

El grafo es completo, es decir, hay al menos un arco que une a cada par de vértices, de tal manera que cualquier acción puede ser comparada con cualquier otra.

Ejemplo

Sea $A = \{a, b. c. d.\}$ un conjunto de acciones posibles.

Sea $K_j = \{$ mala, pasable, media, buena, muy buena $\}$ un conjunto de estados relativos a un criterio j.



Tenemos

$$\gamma_j(a) = \gamma_j(b) = \text{muy buena}$$

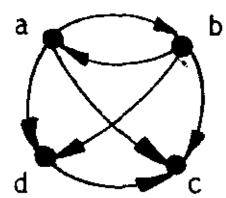
$$\gamma_j(d) = \text{media}$$

$$\gamma_j(c) = \text{pasable}$$

el preorden definido en el criterio j es pues

a,b
d
c

que lo podemos representar por el grafo G_j siguiente:



se verifica fácilmente que este grafo es transitivo y completo

A cada criterio le podemos asociar un grafo similar. Si tenemos m puntos de vista, tendremos m grafos G_j .Así, partiendo de una m-ada de estructuras de preferencia, se busca obtener una estructura única en A, para lo cual debemos agregar los m órdenes o preórdenes en un orden único. Para hacer esto definimos una relación de dominancia, es decir, una relación que traduce las preferencias del tomador de decisiones (precisemos, sin embargo, que esto no es más que uno de los diferentes métodos que existen). Esta relación nos permitirá saber si es realista al decidir que la acción a_i es preferida a la acción a_j.

I-2. *Análisis multicriterio en un ambiente impreciso.*

El análisis multicriterio tal como lo hemos presentado anteriormente se sitúa en un contexto preciso. Se trata ahora de tomar en cuenta la imprecisión o para tomar la palabra del señor Kaufmann, de "fuzzifier" el análisis multicriterio.

I-2-1. *Introducción de la borrosidad en análisis multicriterio.*

Hicimos alusión a la relación de dominancia en la presentación del análisis multicriterio en un ambiente preciso. Esta relación nos indica que una acción a_j domina o no a otra acción a_k. Es posible afinar el análisis aceptando ser más o menos exigente en la dominancia. En lugar de la lógica binaria de todo o nada, admitimos una lógica borrosa más compleja pero que permite un cuadro de análisis menos restrictivo y por lo mismo más próximo de la realidad. Para hacer esto, asociaremos a la hipótesis "a_j es para el tomador de decisiones al menos tan buena como a_k" un cierto grado de credibilidad que será necesario definir. Así tendremos un grafo de dominancia borrosa, es decir un grafo cuyos arcos son portadores de estos grados de credibilidad (ver segunda parte). Entonces nos será posible guiar las selecciones del tomador de decisiones, ya sea utilizando los principios de los análisis del tipo "Electra" (búsqueda del núcleo, clasificación según el criterio del camino más largo) o bien utilizando las propiedades de los subconjuntos borrosos (ver tercera parte).

I-2-2. *El límite de tal introducción.*

Nos proponemos trabajar en una relación de dominancia imprecisa conservando la tabla de datos presentada en el párrafo I-1-1. Ahora bien, esta tabla contiene evaluaciones y es evidente que éstas son imprecisas (a menos que sean precios). En efecto, representan apreciaciones reveladas por un individuo a propósito de cierta acción y en relación a un cierto criterio. Tener en cuenta este estado de hecho nos conducirá entonces a modificar todos los grafos asociados a cada criterio y tendremos los grafos borrosos. ¿Cómo sintetizar estos grafos valuados? Es verdad que tampoco podemos utilizar los operadores comunes ya que las evaluaciones no son aditivas, solo los operadores max o min pueden emplearse en estos casos.

II. *Definición y construcción de la relación de dominancia.*

El objeto de esta segunda parte es poner en evidencia la relación de dominancia en un contexto preciso (sección II-1), luego en un contexto impreciso (sección II-2).

II-1. *Relación de dominancia precisa.*

Se trata de la relación a la que hicimos alusión en la sección I-1-3. Nos proponemos definirla y dar algunos modos de construcción.

II-1-1. *Definición y propiedades del concepto de dominancia.*

Una relación binaria S_A definida en un conjunto no borroso de acciones A se llama relación de dominancia si para todos los pares de acciones el modelador decide en favor de una situación

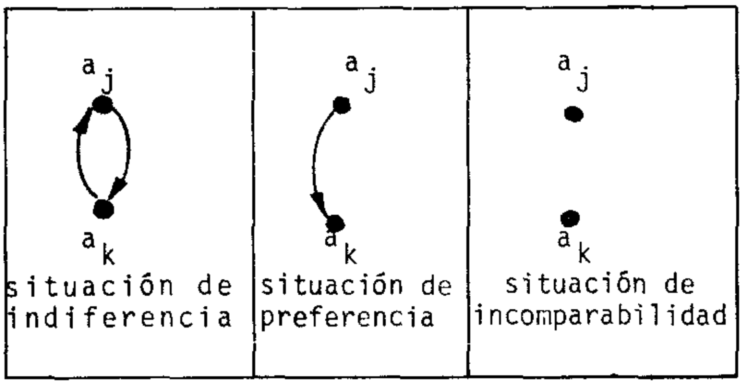
—de indiferencia, tenemos
$a_j S_A a_k$ y $a_k S_A a_j$

—de preferencia amplia o estricta, en favor de a_j por ejemplo, tenemos

$a_j S_A a_k$ y no $a_k S_A a_j$

—de incompatibilidad, tenemos no
$a_j S_A a_k$ y no $a_k S_A a_j$

La representación gráfica es la siguiente:

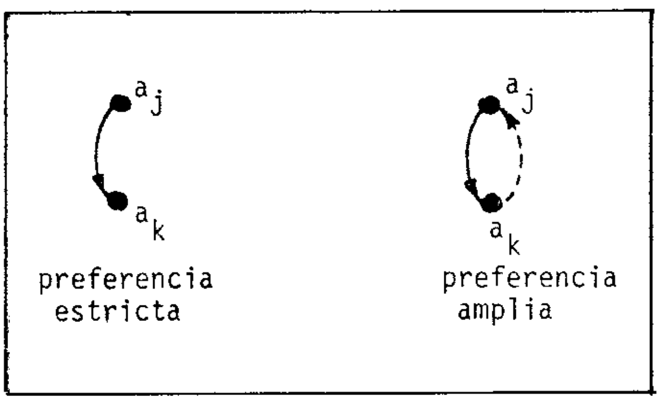


La relación $a_j S_A a_k$ significa que el modelador tiene buenas razones para admitir la hipótesis según la cual el tomador de decisiones prefiere la acción a_j a la acción a_k, o, para expresar la misma idea de una manera diferente, indica que el modelador considera realista el aceptar el riesgo de decidir que a_j es preferida a a_k.

Estas son las evaluaciones

$$g(a_j)=[g_1(a_j),\dots,g_m(a_j)]$$
$$(a_k)=[g_1\ a_k,\dots,g_m(a_k)]$$

de las acciones a_j y a_k en relación a los m criterios y sus relaciones con las preferencias del tomador de decisiones que justifican la decisión en favor de una situación más que de otra y las que, por consecuencia, originan las reglas formales que permiten construir S_A. Notemos que podría ser útil tener la posibilidad de zanjar la diferencia entre las dos situaciones de preferencia estricta y de preferencia amplia. Para hacer esto bastaría introducir otra relación binaria que viniera a completar S_A, por ejemplo



La relación complementaria está representada por línea punteada. La relación de dominancia es transitiva si $a_j S_A a_k$ y $a_k S_A a_h$ implica $a_j S_A a_h$. En lo general, esta relación no es transitiva, esto es, si la concordancia de diferentes puntos de vista es suficiente para que a_j domine a a_k y a_k domine a a_h, de ahí no se desprende lógicamente que a_j domina a a_h. Nos enfrentamos pues a situaciones de incomparabilidad, a criterios que hacen las selecciones difíciles.

Hay, sin embargo, un caso donde la relación de dominancia es transitiva, es el caso donde la dominación es total. Es decir, si dado un par de acciones (a_j, a_k) tenemos

$$g_i(a_j) \geq g_i(a_k)\ \forall_i,\ i \in [1,\dots,m]$$

Es posible resolver el problema de la intransitividad de la relación de dominancia tomando la cerradura transitiva S_A de S_A. Esta se obtiene por la adición de nuevos arcos que hacen falta para que S_A sea transitiva. Deducimos así una nueva relación de dominancia, pero ésta implica que se acepta tomar más riesgos en comparación a la dominancia y por tanto de la selección entre las diferentes acciones.

II-1-2. *Construcción de la relación de dominancia.*

Mostraremos en esta sección tres maneras diferentes de construir relaciones de dominancia. Expondremos la manera cómo se construye una relación de dominancia a partir del principio de compensación después de haber examinado su construcción en los métodos Electra I y II (Eliminación y Selección que Traducen la Realidad). Antes que todo nos falta definir algunas notaciones relativas a un par cualquiera de

Observaciones:

a) las tasas de substitución son difíciles de comprender.
b) su conocimiento en numerosos puntos de A puede requerir de investigaciones costosas y largas.
c) no siempre existe una medida subyacente en cada dimensión (por ejemplo en el caso de escalas discretas).
d) los escalones pueden ser solo señales más o menos bien marcadas.
e) las diferencias $w_i(a_j, a_k)$ no son necesariamente pequeñas. Para resolver estas dificultades se puede razonar no sobre un vector de substitución s_k sino sobre una zona S^k cuyos elementos son vectores de substitución plausibles en el punto e_k, cuando se trata, por el estudio del signo de la combinación lineal $\sigma(a_j, a_k, s^k)$, de probar si las diferencias favorables son o no susceptibles de compensar las diferencias desfaborables. En la práctica, la búsqueda de los límites inferiores y superiores, para cada tasa s^k_{ir}, basta para delimitar tales zonas.

La posición respecto al cero del intervalo:

$$\left[m(a_j, a_k), M(a_j, a_k)\right]$$

$$\text{con } m(a_j, a_k) = \min_{S^k} \sigma(a_j, a_k, s^k)$$

$$\text{y } M(a_j, a_k) = \max_{S^k} \sigma(a_j, a_k, s^k)$$

sirve para establecer la relación de dominancia. Las reglas posibles son muchas. B. Roy propone:

$$d^o_k = m(a_j, a_k) + M(a_j, a_k)/2$$

$$\left[M(a_j, a_k) - m(a_j, a_k)\right]$$

este indicador permite, introduciendo los umbrales, construir la relación de dominancia.

acciones (a_j, a_k). Llamaremos $w_i(a_i, a_j)$ a la cantidad $w_i(a_j, a_k) = \gamma_i(a_j) - \gamma_i(a_k)$, que representa la diferencia de apreciación de las acciones a_j y a_k según el criterio i (la diferencia se expresa en el número de escalones de E_i).

Si a_j es preferida a a_k según el criterio i, es decir, si $\gamma_i(a_j) \geqslant \gamma_i(a_k)$, indicamos esta preferencia por $a_j \; Pa_k$.

Llamaremos $I = \{i / i = 1, 2, \ldots, m\}$ al conjunto de los m criterios o puntos de vista y definimos los tres subconjuntos siguientes.

$I+(a_j, a_k) = \{i : i \in I, w_i(a_j, a_k)$ significativamente positivo$\}$

de donde $a_j \, Pa_k$

$I-(a_j, a_k) = \{i : i \in I, w_i(a_j, a_k)$ significativamente negativo$\}$

de donde $a_i P a_k$

$I=(a_j, a_k)=\{i : i \in I, w_i(a_j . a_k)$ no es significativamente diferente de cero$\}$ de donde $a_j P a_k$ y $a_k P a_j$

Llamaremos $P=\sum_{i=1}^{m} P_i$ la suma de los pesos referentes a los criterios y

$$P^{+}=\sum_{i \in I^{+}} P_i \quad P^{-}=\sum_{i \in I^{-}} P_i \quad P^{=}=\sum_{i \in I^{=}} P_i$$

II-1-2-1. *Electra I.*

Este método permite obtener, sobre la base de una relación de dominancia, una dicotomía del conjunto no borroso A de las acciones posibles en dos subconjuntos, a saber, el núcleo, es decir, el conjunto de las mejores acciones (no comparables) y su complemento. Esta relación de dominancia está definida a partir de dos índices: un índice de concordancia y un índice de discordancia. El primero toma en cuenta los criterios para los cuales a_j está situada en un nivel tan elevado como a_k, en concordancia pues con la hipótesis. a_j, domina a a_k. El segundo toma en cuenta los criterios en discordancia con esta hipótesis. El indicador de concordancia $C(a_j, a_k)$ es igual a la suma de los coeficientes de ponderación de los criterios para los que tenemos que a_j es al menos preferido sobre a_k dividido por la suma total de los coeficientes de ponderación, es decir

$$C(a_j, a_k)=\frac{P+}{P}$$

Este índice varía de cero a 1 y mide la importancia de la dominancia de a_k por a_j. Si $C(a_j, a_k)$ es igual a 1, hay una dominancia completa de a_k por a_j; si $C(a_j, a_k)$ es igual a cero no habrá dominancia de a_k por a_j. Como es peligroso despreciar los criterios del conjunto I- para los que hay discordancia con la hipótesis "a_j es para el tomador de decisiones al menos tan buena como a_k", construimos un índice, $d_s(a_j, a_k)$, llamado índice de discordancia y que mide la amplitud del desacuerdo. Para hacer esto ordenamos las amplitudes de los desacuerdos en orden decreciente; $d_s(a_j, a_k)$ se define entonces por la relación de la amplitud del s-avo desacuerdo a la amplitud del mayor desacuerdo posible (es decir, a la altura de la escala más grande, h)

$$d_s(a_j, a_k)=\frac{\text{s-avo desacuerdo}}{h}$$

Este índice también varía de cero a 1. Si $d_s(a_j, a_k) = 0$, no hay desacuerdo con la hipótesis de dominancia; por lo contrario, si $d_s(a_j, a_k) = 1$ hay el desacuerdo máximo en un criterio. Observemos que si el índice de concordancia es unitario, entonces el índice de discordancia es nulo, pero lo inverso no es cierto. Podemos ahora construir la relación de dominancia S_A, basta dar dos números comprendidos entre cero y 1, uno será p(umbral de concordancia) cercano a 1, el otro será q(umbral de discordancia) vecino a cero. Diremos que una acción a_j domina una acción a_k si y solamente si el par (a_j, a_k) admite al mismo tiempo.

— un indicador de concordancia al menos igual a p
— un indicador de discordancia a lo máximo igual a q.

Es entonces posible construir el grafo de dominancia precisa G(p,q,s). Este último está definido por:

$$\left.\begin{array}{l} C(a_j, a_k) \geqslant p \\ \\ \text{y} \quad d_s(a_j, a_k) \leqslant q \end{array}\right\} \longrightarrow (a_j, a_k) \in G(p,q,s)$$

La determinación del núcleo de este grafo, es decir, del conjunto de acciones que dos a dos son comparables y que tomadas globalmente dominan a toda otra acción situada fuera de este conjunto, permite obtener una partición de A.

Observación: si escogemos otros umbrales p' y q' tales que

$$p \leqslant p' \quad \text{y} \quad q \geqslant q'$$

entonces G(p,q,s) admite a G(p',q',s) como grafo parcial y determinamos de manera similar las relaciones de dominancia ajustadas.

II-1-2-2. *Electra II.*

Este método permite hacer una clasificación de las diferentes acciones, esto último obteniéndose a partir de dos relaciones de dominancia, una fuerte (S_F) y otra débil (S_D), lo que, naturalmente, enriquece considerablemente el grafo de dominancia. Al igual que para Electra I, las relaciones de dominancia son definidas a partir de la concordancia y discordancia. Sea C un umbral de concordancia. La prueba de concordancia es aceptada si

$$C(a_j, a_k) = P(a_j + a_k) + P(a_j, a_k)/P$$

$$\text{y si} \quad P+(a_j, a_k) \;/\; P-(a_j, a_k) \geqslant 1$$

Como en Electra I, esta prueba no basta para aceptar la dominancia de a_k por a_j. Supongamos que sea verificada para el par de acciones (a_j, a_k) y consideremos un criterio cualquiera $i \in I\text{-}(a_j, a_k)$. Se tendrá fundamento para rechazar la dominancia de a_j por a_k desde el instante en que $\gamma_i(a_j)$ aparezca como demasiado descriminante de $\gamma_i(a_k)$. Se introduce para cada escala E_i el conjunto D_i de parejas de escalones incompatibles con la concordancia. La construcción de las relaciones de dominancia fuerte y débil necesita que fijemos dos umbrales de concordancia C° y C^* y para cada $i \in I^-(a_j, a_k)$, dos conjuntos D_i y D_i^* de discordancia

$$\boxed{C^\circ < C^* \quad \text{y} \quad D_i^\circ \supset D_i^*}$$

Diremos que a_j domina fuertemente a a_k si y solamente si

$$\left\{\begin{array}{l}
\boxed{\begin{array}{l} C(a_j, a_k) \geqslant C^\circ \quad \text{y} \\ P^+(a_j, a_k)/P^-(a_j, a_k) \geqslant 1 \end{array}} \\
\boxed{\begin{array}{l} \text{si } C(a_j, a_k) < C^* : \\ [\gamma_i(a_j), \gamma_i(a_k)] \notin D_i^\circ, \ \forall_i \in I^-(a_j, a_k) \end{array}} \\
\boxed{\begin{array}{l} \text{si } C(a_j, a_k) \geqslant C^* \\ [\gamma_i(a_j), \gamma_i(a_k)] \notin D_i^*, \ \forall_i \in I^-(a_j, a_k) \end{array}}
\end{array}\right.$$

Sea C^- otro umbral tal que C^- C°; a_j domina débilmente a a_k si y solamente si

$$\left\{\begin{array}{l}
\boxed{\begin{array}{l} C(a_j, a_k) \geqslant C^- \quad \text{y} \\ P\ (a_j, a_k)/P^-(a_j, a_k) \geqslant 1 \end{array}} \\
\boxed{\begin{array}{l} \gamma_i(a_j), \gamma_i(a_k) \\ \in D_i^\circ, \ \forall_i \in I^-(a_j, a_k) \end{array}}
\end{array}\right.$$

Obtenemos así un grafo de dominancia fuerte y un grafo de dominancia débil. De acuerdo al criterio del camino más largo (ver tercera parte) es posible obtener dos dominancias, a saber: una dominancia directa y una dominancia indirecta, después, dado que el tomador de decisiones tiene necesidad de un orden único, deducimos a partir de estos una clasificación mediana que se encuentra a igual distancia de las dos precedentes.

II-1-2-3. *Relación de dominancia definida a partir del índice de compensación.*

Sea (a_j, a_k) un par de acciones. Por definición, una condición necesaria a la dominancia de a_k por a_j es el cúmulo de diferencias negativas que provienen de los criterios de $I^-(a_j, a_k)$, es decir, para los cuales tenemos a_k preferida a a_j, sea al menos compensado por el cúmulo de diferencias positivas que provienen de los criterios $I+(a_j, a_k)$, es decir, para los cuales tenemos a_j preferida a a_k.

Las nociones de cúmulo y de compensación sobrentienden una agregación de diferencias en una misma dimensión que las vuelve comparables. El concepto de tasa marginal de substitución permite ver si las diferencias positivas compensan o no las diferencias negativas. Sea s^k_{ir} la tasa marginal de substitución en el punto $\bar{e}_k = \delta(a_k) \in E_k$ de un criterio i en relación a un criterio de referencia r. Es igual al aumento en la dimensión E_r que es necesario dar a $\delta_r(a_k)$ para compensar la pérdida en E_i de una unidad o de un escalón a partir de $\delta_i(a_k)$, permaneciendo incambiables todas las otras diferentes a la r-ava y la r-ava misma. Compensar significa que la opción a_k debe aparecer equivalente a la ocpión ficticia a^i_k tal que:

$$\delta_i(a'_k) = \delta_i(a_k) - 1 \text{ y } \delta_r(a'_R) = \delta_r(a_k) + s^k_{ir}$$
$$\delta_h(a'_k) = \delta_h(a_k) \quad \forall_h \in I - \{i, r\}$$

El estudio del signo de la expresión

$$\sigma(a_j, a_k, s^k) = \sum_{i \in I^-} w_i(a_j, a_k)\, s^k_{ir} + \sum_{i \in I^+} w_i(a_j, a_k)\, s^k_{ir} + \sum_{i \in I^=} w_i(a_j, a_k)\, s^k_{ir}$$

permite determinar si la compensación se hace o no.

$$\text{si } \sigma(a_j, a_k, s^k) < 0 \longleftrightarrow a_j \, S \, a_k$$
$$\text{si } \sigma(a_j, a_k, s^k) > 0 \longleftrightarrow a_j \, S a_k$$

En el Próximo Número la Siguiente Parte